Θεώρημα: Για μια κλειστή διαδρομή, C, έχω ότι το επικαμπύλιο ολοκλ.

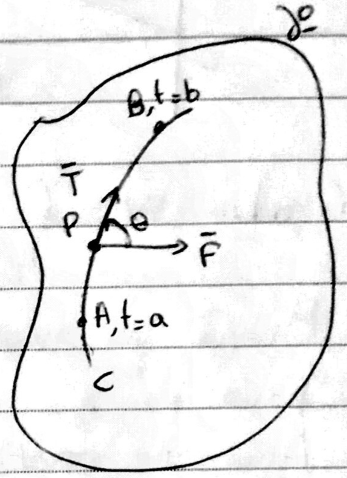
$$\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0 \iff \bar{F} \text{ συντηρητικό}.$$

28/03/2019

Μάθημα 8ο

Έργο Δυναμικής

$$W = \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_A^B \bar{F}\cdot \bar{T}\, ds$$



$C: \ \bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$

$$W = \oint \bar{F} d\bar{r} = \int_{t=a}^{t=b} \bar{F}\cdot\bar{v}\, dt = \int_a^b \bar{F}(t)\cdot\bar{v}(t)\, dt$$

Τι σημαίνει $\oint_C \bar{F} d\bar{r}$;

→ Διανυσματικό Πεδίο

Έστω δύναμη $\bar{F} = M\bar{i} + N\bar{j} + P\bar{k}$, $\bar{F}: O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \to \bar{F} = (M,N,P)$

άρα $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

στοιχειώδης μετατόπιση:

$d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$

Οπότε $$\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_C (M\bar{i} + N\bar{j} + P\bar{k})\cdot(dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}) = \oint_{A\to B} Mdx + Ndy + Pdz$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε το έργο W της $\bar{F} = -2y\bar{i} + 3x\bar{j}$ από το O(0,0) στο A(1,2) πάνω 1) στην ευθεία $y = x$

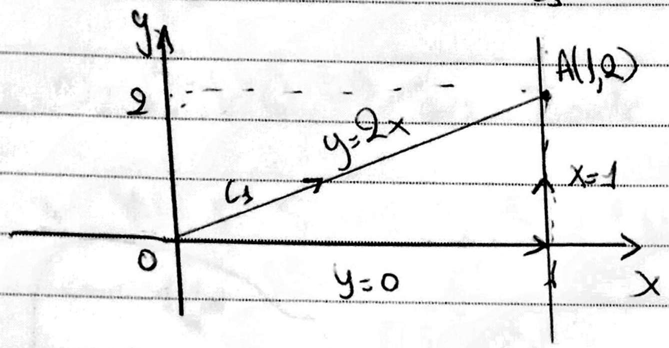
2) στον κλιμακωτό δρόμο $y=0$, $x=1$

3) Τι παρατηρείτε;

Λύση

① Έχουμε το διανυσματικό πεδίο $\bar{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Θέλω το έργο $W = \oint_{C_1} \bar{F} \cdot d\bar{r}$



Έχουμε $W = \oint_{C_1} (-2y\bar{i} + 3x\bar{j}) \cdot (dx\bar{i} + dy\bar{j}) = \oint_{C_1} (-2y\,dx + 3x\,dy)$

Μπορώ να εκφράσω το y με x και να έχω ένα επικαμπύλιο μόνο με x.

Από την υπόθεση έχω $y = 2x$ και $dy = 2dx$

Άρα:

$W = \oint_{C_1} -2(2x)\,dx + 3x\,2\,dx = \int_0^1 2x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$ J

και το όριο ολοκλήρωσης εξαρτάται του x

Παραγόμενο έργο για τη διαδρομή C_1 πάνω στην $y=x$ είναι 1 Joule

② $W = \oint_{C_2} \bar{F}\,d\bar{r} = \oint_{OB} \bar{F} \cdot d\bar{r} + \int_{BA} \bar{F} \cdot d\bar{r} =$

εφόσον y=0   εφόσον έχω μηδενική εξάρτηση

$= \oint_{OB} \cancel{-2y\,dx} + 3x\,dy + \oint_{BA} -2y\,\cancel{dx} + 3x\,dy =$

x=1 άρα dx=0

$= \oint_{BA} 3x\,dy = 3\int_{BA} dy = \int_0^2 3\,dy = 3y\Big|_0^2 = 6$ J

Άρα εάν μετακινήσω το σώμα μου πάνω στον άξονα x τότε δεν παράγω έργο, δηλ. $W = 0$. (δηλ. διαδρομή OB)

Για την διαδρομή BA παράγω 6 J

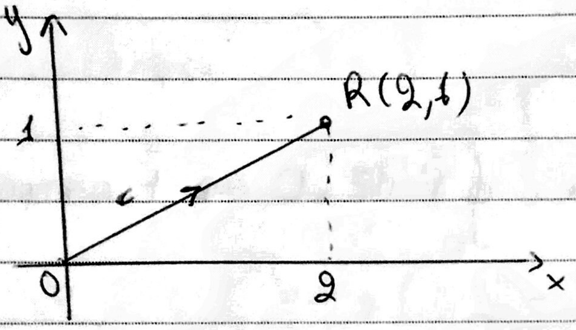
③ Παρατηρώ ότι εάν ακολουθήσω άλλο δρόμο θα έχω διαφορετικό έργο. Το έργο δλδ δεν εξαρτάται από την διαδρομή.
Δεν έχω συντηρητικό πεδίο.

Άσκηση 2.

$\bar{F} = 2y\bar{i} + xy\bar{j}$, $O(0,0) \to R(2,1)$

Κινείται ευθύγραμμα, θέλω να βρω το έργο.

Καμπύλη $C: \ y = \frac{1}{2}x$



$$W = \oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_C 2y\,dx + xy\,dy =$$

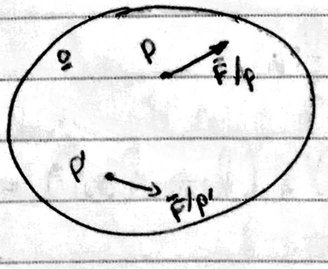
$$= \oint_C 2\,\frac{1}{2}x\,dx + x\frac{1}{2}x\frac{1}{2}dx =$$

$$= \int_0^2 x\,dx + \frac{1}{4}x^2\,dx = \int_0^2 x\,dx + \frac{1}{4}\int_0^2 x^2\,dx = \ldots = \frac{8}{3} \text{ Joule}$$

(*) Διανυσματικό πεδίο = μια διανυσματική συνάρτηση F που με πάει από το $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$

Θεώρημα.

Έστω $\bar{F} = M\bar{i} + N\bar{j} + P\bar{k}$ ένα διανυσματικό πεδίο με συνεχείς συνιστώσες σε ένα ανοιχτό πεδίο Ω



Δ.Π. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση f τ.ω. $\bar{F} = \bar{\nabla} f = \text{grad} f =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k} \iff$$

$\Longleftrightarrow$

① $\forall A,B \in \Omega$ το έργο κ αλλιώς επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $W = \oint_{A\to B} \bar{F}\cdot d\bar{r}$ δεν εξαρτάται από την διαδρομή που θα ακολουθήσει αλλά μόνο από τα A και B

② Αν W είναι ανεξάρτητο της διαδρομής τότε $W = \oint_{A\to B} \bar{F}\cdot d\bar{r} = f(B) - f(A)$

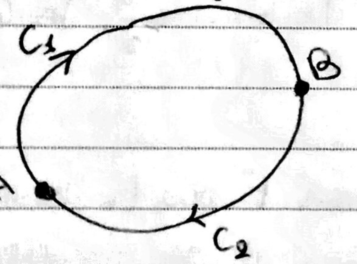
Τι γίνεται όταν έχω κλειστό βρόχο;
Θα το δούμε στο επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα

Για μια κλειστή διαδρομή D έχουμε: $\oint_D \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0 \Longleftrightarrow \bar{F}$ συντηρητική

Απόδειξη.

($\Longrightarrow$) Γνωρίζουμε ότι $W = \oint_D \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$



Έστω τυχαίο σημείο B, τότε μπορώ να γράψω το εξής:

$$W = \oint_{C_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} + \oint_{C_2} \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \oint_{C_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} = -\oint_{C_2} \bar{F}\cdot d\bar{r}$$ άρα $\bar{F}$: συντηρητική

($\Longleftarrow$) Αν $\bar{F}$: συντηρητική τότε: $\int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{r} = f(B) - f(A)$

Δλδ: $\oint_D \bar{F}\cdot d\bar{r} = \oint_{C_1} \bar{F}\cdot d\bar{r} + \oint_{C_2} \bar{F}\cdot d\bar{r} = (f(B) - f(A)) + (f(A) - f(B)) = 0$

Συμπέρασμα SOS

Αν υπάρχει διαφορίσιμη f τω $\bar{F} = \bar{\nabla} f \Longleftrightarrow \bar{F}$: συντηρητική $\Longleftrightarrow$
$W = \oint_D \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$

1) $\bar{F} = M\bar{i} + N\bar{j} + P\bar{k}$, δ.π. στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

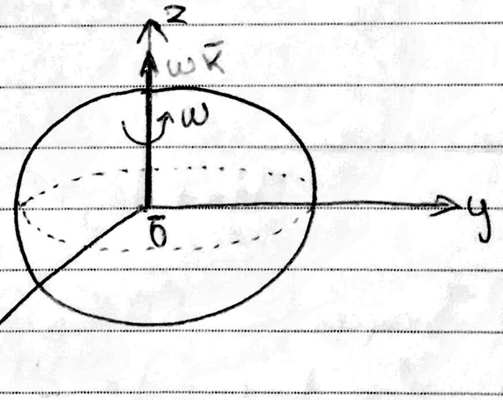
$$\bar{F} = \nabla f = \begin{cases} M = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ N = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ P = \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

Στροβιλισμός: $\bar{\nabla} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ M & N & P \end{vmatrix} =$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y}\right)\bar{k}$$

πχ

Στροβιλισμός Γης



(Η βάθμωση αναφέρεται σε βαθμωτές συναρτήσεις.)

Θεώρημα:

Για ένα δ.π.: $\bar{F} = M\bar{i} + N\bar{j} + P\bar{k}$, $\exists$ διαφορίσιμη βαθμωτή συνάρτηση f:

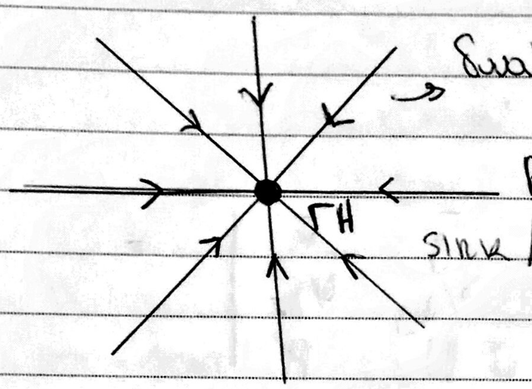
$\bar{F} = \bar{\nabla} f \iff M\,dx + N\,dy + P\,dz = df$

(τέλειο διαφορικό ή ακριβής μορφή)

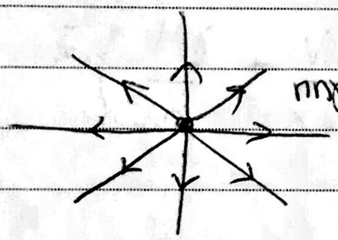
Παρατήρηση: Ισοδύναμα μπορούμε ν.δ.ο.:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Τότε η $\bar{F}$ είναι αστρόβιλη ή $\bar{\omega} = \bar{\nabla} \times \bar{F} = \bar{0}$ (irrotational)



Ένα σώμα με διαστάσεις, αν πέσει στο βαρυτικό πεδίο της Γης, τότε στροβιλίζεται λόγω αντιστάσεων του αέρα.



Απόδειξη Θεωρήματος

Αν $\exists f$, τότε $M dx + N dy + P dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df$

Τότε η f διαφορίσιμη, δηλ.:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \text{ή} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Λόγω (συνέχειας και Schwarz) γνωστού λήμματος ισχύει:

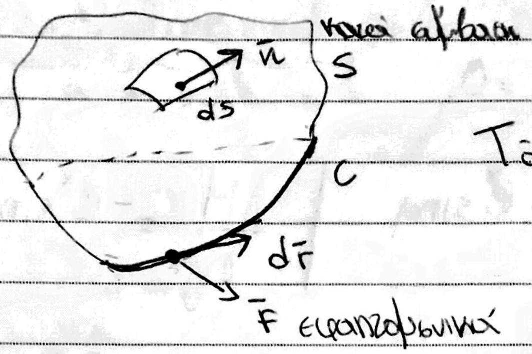
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Όμοια και για τις υπόλοιπες συνιστώσες του στροβιλισμού.

(⟸) Αρκεί ν.δ.ο. $\oint_D \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$ τότε από θεώρημα Stokes

Θ. Stokes η εφαπτομενική μορφή σε 3 διαστάσεις
σε 2 διαστάσεις: Θ. Green
σε κάθετη μορφή Θεώρημα Gauss ή απόκλισης

Έστω Δ.π. $\bar{F} = M\bar{i} + N\bar{j} + P\bar{k}$ κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης C, μιας επιφάνειας S.



Τότε: $\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_S (\bar{\nabla}\times\bar{F})\cdot\bar{n}\,ds$

{ Αν το πεδίο αστρόβιλο τότε $\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} \neq 0$

Αν W = 0 τότε το πεδίο έχει στροβιλισμό }.

Και επειδή $\bar{\nabla}\times\bar{F} = 0$ έχουμε ότι και $W = \oint_D \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$

Άσκηση

Έστω το πεδίο: $\bar{F} = \overbrace{(e^x\cos y + yz)}^{M}\bar{i} + \overbrace{(xz - e^x\sin y)}^{N}\bar{j} + \overbrace{(xy+z)}^{P}\bar{k}$

Να βρείτε f αν $\exists$ τ.ω.: $\bar{F} = \nabla f$

$\bar{F}$ συντηρητικό $\Leftrightarrow \bar{\nabla}\times\bar{F} = \bar{0}$ (curl) (αστρόβιλο)

Απόκλιση: $\bar{\nabla}\cdot\bar{F} = 0$ (div $\bar{F}$)

(σωληνοειδές πεδίο: δεν έχει πηγές ή καταβόθρες)

Λύση

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = x$$

$\Downarrow$

1η συνιστώσα στροβιλισμού $= 0$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} = y \;\Big|\; \frac{\partial N}{\partial x} = z - e^x\sin y \;\Big|\; \frac{\partial M}{\partial y} = -e^x\sin y + z$$

Άρα: $\bar{\nabla}\times\bar{F} = \bar{0}$, Άρα αστρόβιλο πεδίο και $\exists f : \bar{F} = \bar{\nabla} f$

Έχουμε: $M = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $N = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $P = \dfrac{\partial f}{\partial z}$

- $M = \dfrac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x\cos y + yz \Rightarrow \displaystyle\int \frac{\partial f}{\partial x}dx = f = e^x\cos y + xyz + g(y,z)$

$\Rightarrow f = e^x\cos y + xyz + g(y,z)$

- Παραγωγίζω την f ως προς y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin y\, e^x + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x\sin y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow g = g(z)$ συνάρτηση μόνο ως προς z

- $\dfrac{\partial f}{\partial z} = xy + z \Rightarrow xy + \dfrac{\partial g}{\partial z} = xy + z \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial z} = z \xRightarrow{\text{ολοκλ.}}$

$\Rightarrow g(z) = \dfrac{z^2}{2} + c$, c σταθερά.

Άρα: $\boxed{f = e^x\cos y + xyz + \dfrac{z^2}{2} + c}$ συνάρτηση δυναμικού.

Άσκηση 3

$$\int_{A=(1,1,1)}^{B=(2,3,1)} (ydx + xdy + 4dz) = ;$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα από τη θέση A -> B χωρίς να μας δίνει κάποια πληροφορία για τη διαδρομή.

Θα ελέγξω αρχικά αν το πεδίο είναι αστρόβιλο:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

Οπότε: $\bar{\nabla} \times \bar{F} = \bar{0}$ δηλ. το πεδίο αστρόβιλο άρα:

$\exists f$ τω $\bar{F} = \bar{\nabla} f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = N \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow f = yx + g(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = M \Rightarrow x + \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = x \Rightarrow \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow g = g(z)$ (εξαρτάται μόνο από z)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = P \Rightarrow 0 + \frac{\partial g}{\partial z} = 4 \Rightarrow g(z) = 4z + c$$

Άρα: $f = yx + 4z + c$ Συνάρτηση Δυναμικού

Το επικαμπύλιο θα είναι: $\int_A^B ydx + xdy + 4dz = f(B) - f(A) =$

$= f(2,3,1) - f(1,1,1) = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + c - 1 - 4 - c = 10 - 5 = 5$ Joule